Глава 5

Методи за решаване на системи линейни уравнения

Много задачи от изчислителната математика се свеждат до решаване на система линейни алгебрични уравнения:

$$
\left|\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &=& b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &=& b_2\\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & & \vdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &=& b_n\,.
\end{array}\right.
$$

Горната система може да се запише като векторно равенство

$$Ax = b\,,$$

където $A = (a_{ij})$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ и $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ са съответно матрицата от коефициенти, векторът от свободни членове и векторът от неизвестни. По-нататък ще предполагаме, че A е неособена матрица, т.е. детерминантата ѝ е различна от нула ($|A| \neq 0$).

§ 1. Точни (директни) методи за решаване на системи линейни уравнения

Всяка една система линейни алгебрични уравнения еднозначно е определена с матрицата

$$
B = \left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n
\end{array}\right)
$$

наречена *разширена матрица* на съответната система.

Един числен метод наричаме *точен*, когато при предположение, че началните данни са дадени верни и междинните аритметични операции са краен брой и се извършват точно, то полученото решение е точно.

1.1. Метод на Гаус

Един от най-използваните методи за решаване на системи линейни уравнения е методът на Гаус. Този метод притежава различни модификации и се използва обикновено в два режима – с избор на главен елемент и без избор на главен елемент.

При метода на Гаус системата линейни уравнения се трансформира последователно, чрез елементарни преобразования, в еквивалентни на нея системи до получаване на система с триъгълна матрица.

Ще разгледаме само *схемата на Гаус без избор на главен елемент*, като за целта ще използваме разширената матрица B. Към матрицата B се добавя обикновено допълнителен, контролен стълб, но тук ще го пропуснем за простота.

На първата стъпка, първият ред на B се умножава последователно с $-a_{i1}/a_{11}$ и се прибавя към i-ти ред, $i = 2, 3, \ldots, n$. В резултат се получава разширената матрица

$$B^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right),$$

където

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}\,, \qquad i, j = 2, 3, \ldots, n\,, \\ b_i^{(1)} &= b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1\,, \qquad i = 2, 3, \ldots, n\,. \end{aligned}$$

На втората стъпка, вторият ред на $B^{(1)}$ се умножава последователно с $-a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ и се прибавя към i-ти ред, $i = 3, 4, \dots, n$. Така се получава матрицата

$$
B^{(2)} = \left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)}
\end{array}\right),
$$

където

$$
\begin{aligned}
a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{2j}^{(1)}\,, \qquad i, j = 3, 4, \dots, n\,, \\
b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)}\,, \qquad i = 3, 4, \dots, n\,.
\end{aligned}
$$

След $n-1$ стъпки се получава разширената матрица

$$
B^{(n-1)} = \left(\begin{array}{cccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} & b_1 \\
0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3,n-1}^{(2)} & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(n-2)} & a_{n-1,n}^{(n-2)} & b_3^{(n-2)} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)}
\end{array}\right).
$$

Направените стъпки дотук се наричат *прав ход* на метода на Гаус. Следва *обратният ход* – от матрицата $B^{(n-1)}$, която е разширена матрица на еквивалентна система на дадената, се определят неизвестните x_i, като от последния ред се определя x_n. След това от предпоследния ред се определя x_{n-1}:

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}\,; \quad x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}}\left(b_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1,n}^{(n-2)}x_n\right)$$

и така нататък. Накрая от първия ред се определя x_1:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n\right)\,.$$

Очевидно при прилагането на метода на Гаус без избор на главен елемент, елементите $a_{i\,i}^{(i-1)}$, които се получават на всяка стъпка, е необходимо да са различни от нула. Тази разновидност на метода се използва обикновено, когато изчисленията се правят на ръка, докато на компютри се реализира методът с избор на главен елемент.

Със следващия пример ще илюстрираме описания метод.

Пример 1.1. *Да се решат точно, по метода на Гаус, системите:*

$$a)\ \left|\begin{array}{rcl} 9x_1 - 6x_2 - 2x_3 &=& 10 \\ -2x_1 + 8x_2 - 3x_3 &=& 0 \\ -\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 &=& 0\,; \end{array}\right. \qquad б)\ \left|\begin{array}{rcl} -\ x_1 -\ \ x_2 + 6x_3 &=& 2 \\ -\ x_1 + 6x_2 -\ \ x_3 &=& 34 \\ 6x_1 -\ \ x_2 -\ \ x_3 &=& 12\,. \end{array}\right.$$

Решение: а) Разширената матрица на системата е

$$B = \left(\begin{array}{rrr|r} 9 & -6 & -2 & 10 \\ -2 & 8 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 6 & 0 \end{array}\right).$$

По метода на Гаус на първата стъпка умножаваме първия ред с $2/9$ и прибавяме към втори ред, умножаваме първия ред с $1/9$ и прибавяме към трети ред. Така получаваме матрицата

$$B^{(1)} = \left(\begin{array}{rrr|r} 9 & -6 & -2 & 10 \\ 0 & \frac{20}{3} & -\frac{31}{9} & \frac{20}{9} \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{52}{9} & \frac{10}{9} \end{array}\right).$$

Следва втората стъпка – умножаваме втория ред на матрицата $B^{(1)}$ с $\frac{7}{10}$ и прибавяме към трети ред, с което получаваме матрицата

$$B^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -6 & -2 & 10 \\ 0 & \frac{20}{3} & -\frac{31}{9} & \frac{20}{9} \\ 0 & 0 & \frac{101}{30} & \frac{8}{3} \end{array}\right),$$

която е разширена матрица на системата:

$$\left|\begin{array}{rcl} 9x_1 - \ 6\,x_2 - \ \ 2\,x_3 & = & 10 \\ \frac{20}{3}x_2 - \ \frac{31}{9}x_3 & = & \frac{20}{9} \\ \frac{101}{30}x_3 & = & \frac{8}{3}\,. \end{array}\right.$$

Предходните две стъпки бяха от правия ход на метода на Гаус. Предстои обратният ход, при който се определят стойностите на неизвестните. От последното уравнение на системата получаваме $x_3 = \frac{80}{101}$. Така получената стойност на x_3 заместваме във второто уравнение, откъдето изразяваме x_2:

$$x_2 = \frac{3}{20}\left(\frac{20}{9} + \frac{31}{9}x_3\right) = \frac{1}{3} + \frac{31}{60}\,\frac{80}{101} = \frac{75}{101}\,.$$

Накрая заместваме стойностите на x_2 и x_3 в първото уравнение, откъдето пресмятаме

$$x_1 = \frac{1}{9}\,(10 + 6x_2 + 2x_3) = \frac{1}{9}\left(10 + 6\frac{75}{101} + 2\frac{80}{101}\right) = \frac{180}{101}\,.$$

б) Разширената матрица на системата е

$$B = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 6 & 2 \\ -1 & 6 & -1 & 34 \\ 6 & -1 & -1 & 12 \end{array}\right).$$

Умножаваме първия ред на B последователно с -1 и 6 и прибавяме съответно към втори и трети ред. Получаваме разширената матрица

$$B^{(1)} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 32 \\ 0 & -7 & 35 & 24 \end{array} \right),$$

на която втория ред прибавяме към трети. Така получаваме

$$B^{(2)} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 32 \\ 0 & 0 & 28 & 56 \end{array} \right).$$

От третия ред на матрицата $B^{(2)}$ определяме $x_3 = \frac{56}{28} = 2$. От втория ред имаме

$$7x_2 - 7x_3 = 32\,,$$

където заместваме вече намерената стойност на x_3 и получаваме

$$x_2 = \frac{1}{7}(32 + 7x_3) = \frac{46}{7}\,.$$

От първия ред на $B^{(2)}$ имаме $-x_1 - x_2 + 6x_3 = 2$, откъдето

$$x_1 = 2 + x_2 - 6x_3 = \frac{24}{7}\,.$$

Методът на Гаус е много удобен и за пресмятане на детерминанти на матрици. Например детерминантите на матриците на системите от пример 1.1 съответно са: $9.\frac{20}{3}.\frac{101}{30} = 202$ и $(-1).7.28 = -196$.

1.2. Метод на Гаус-Жордан

Методът на Гаус-Жордан е модификация на метода на Гаус, при който в процеса на преобразованията вместо триъгълна матрица се получава диагонална. Този метод също има два режима – с избор на главен елемент и без избор. Ще опишем метода без избор на главен елемент.

Първата стъпка съвпада с тази на метода на Гаус, т.е. от разширената матрица B се получава матрицата $B^{(1)}$.

На втората стъпка, вторият ред на $B^{(1)}$ се умножава последователно с $-a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ и се прибавя към i-ти ред, $i = 3, 4, \ldots, n$, както при метода на Гаус. Освен това, същият втори ред се умножава с $-a_{12}/a_{22}^{(1)}$ и се прибавя към първи ред. В резултат се получава матрицата

$$B^{(2)} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & 0 & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right),$$

където

$$\begin{aligned} a_{1j}^{(1)} &= a_{1j} - \frac{a_{12}}{a_{22}^{(1)}} a_{2j}^{(1)}, \qquad j = 3, \ldots, n, \\ b_1^{(1)} &= b_1 - \frac{a_{12}}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)}, \\ a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{2j}^{(1)}, \qquad i, j = 3, \ldots, n, \\ b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)}, \qquad i = 3, \ldots, n. \end{aligned}$$

На третата стъпка, третият ред се умножава с

$$-\frac{a_{13}^{(1)}}{a_{33}^{(2)}}, \qquad -\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{33}^{(2)}}, \qquad -\frac{a_{i3}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$$

и се прибавя съответно към първи, втори и i-ти ред, $i = 4, \ldots, n$.

Така се получава матрицата

$$B^{(3)} = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & 0 & 0 & a_{14}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & 0 & a_{24}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_4^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n4}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{array}\right),$$

където

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i3}^{(1)}}{a_{33}^{(2)}} a_{3j}^{(2)}, \qquad i = 1, 2, \; j = 3, \dots, n, \\ b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} - \frac{a_{i3}^{(1)}}{a_{33}^{(2)}} b_3^{(2)}, \qquad i = 1, 2, \\ a_{ij}^{(3)} &= a_{ij}^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} a_{3j}^{(2)}, \qquad i, j = 4, \dots, n, \\ b_i^{(3)} &= b_i^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} b_3^{(2)}, \qquad i = 4, \dots, n. \end{aligned}$$

На $(n-1)$-вата стъпка се получава разширената матрица

$$B^{(n-1)} = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n}^{(n-2)} & b_1^{(n-2)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & a_{2n}^{(n-2)} & b_2^{(n-2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & 0 & a_{3n}^{(n-2)} & b_3^{(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(n-2)} & a_{n-1,n}^{(n-2)} & b_{n-1}^{(n-2)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right).$$

За разлика от метода на Гаус при този метод има още една стъпка, при която последният ред се умножава с $-a_{in}^{(n-2)}/a_{nn}^{(n-1)}$ и се прибавя към i-ти ред, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. В резултат се получава матрицата

$$B^{(n)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & b_1^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & 0 & b_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array} \right),$$

която е съответна на еквивалентна система на дадената. Неизвестните x_i се определят по формулите:

$$x_1 = \frac{b_1^{(n-1)}}{a_{11}}, \qquad x_i = \frac{b_i^{(n-1)}}{a_{ii}^{(i-1)}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n\,.$$

Разгледаният режим на метода – без избор на главен елемент, както и при метода на Гаус, се прилага при смятане на ръка, докато с компютри се прилага методът с избор на главен елемент.

Пример 1.2. *Да се реши точно по метода на Гаус-Жордан системата*

$$\left|\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 - 3x_3 & = & 4 \\ 4x_1 + 20x_2 + 14x_3 & = & 20 \\ 3x_1 + 14x_2 + 14x_3 & = & 14\,. \end{array}\right.$$

Решение: Разширената матрица на системата е

$$B = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -3 & 4 \\ 4 & 20 & 14 & 20 \\ 3 & 14 & 14 & 14 \end{array} \right).$$

Първата стъпка по метода на Гаус-Жордан съвпада с метода на Гаус – умножаваме първия ред с -4 и -3 и прибавяме съответно към втори и трети ред. Така получаваме разширената матрица

$$B^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 26 & 4 \\ 0 & 2 & 23 & 2 \end{array} \right).$$

На втората стъпка умножаваме втория ред на матрицата $B^{(1)}$ с -1 и $-\frac{1}{2}$ и прибавяме съответно към първи и трети ред, с което получаваме матрицата

$$B^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -29 & 0 \\ 0 & 4 & 26 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{array} \right).$$

На следващата стъпка умножаваме третия ред на $B^{(2)}$ с $\frac{29}{10}$ и $-\frac{13}{5}$ и прибавяме съответно към първи и втори ред, в резултат получаваме

$$B^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{array} \right).$$

Последователно от първи, втори и трети ред на последната матрица пресмятаме

$$x_1 = \frac{0}{1} = 0\,, \quad x_2 = \frac{4}{4} = 1\,, \quad x_3 = \frac{0}{10} = 0\,.$$

Методът на Гаус–Жордан освен за решаване на системи се използва и за пресмятане на обратна матрица. Разбира се, чрез този метод може да се пресмятат и детерминанти на матрици.

За пресмятане на обратната на дадена матрица A, преобразованията се правят върху разширената матрица $(A|I)$ до получаване на $(I|B)$. Така получената матрица B е обратната на A, т.е. $B = A^{-1}$.

Пример 1.3. *Да се намери обратната матрица, по метода на Гаус-Жордан, на матрицата*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: Разглеждаме разширената матрица

$$B = (A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Обратната матрица A^{-1} на A се намира чрез еквивалентни преобразования върху разширената матрица $(A|I)$ до привеждане на матрицата A в единична матрица.

На първата стъпка умножаваме първия ред на разширената матрица $(A|I)$ с -3, -2 и -4 и прибавяме съответно към втори, трети и четвърти ред, в резултат получаваме

$$B^{(1)} = \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -10 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

На втората стъпка умножаваме втория ред на $B^{(1)}$ с 1 и $-\frac{5}{2}$ и прибавяме съответно към първи и четвърти ред, а трети ред преписваме. Така получаваме матрицата

$$B^{(2)} = \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -2 & -6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -10 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 10 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{array}\right).$$

На третата стъпка умножаваме третия ред на $B^{(2)}$ с 1, $\frac{5}{2}$ и $\frac{45}{4}$ и прибавяме съответно към първи, втори и четвърти ред. Така получаваме матрицата

$$B^{(3)} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -11 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -\frac{45}{2} & -8 & 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{65}{4} & 6 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{4} & 1 \end{array}\right).$$

На четвъртата стъпка умножаваме четвъртия ред на $B^{(3)}$ с $\frac{44}{65}$, $\frac{18}{13}$ и $\frac{4}{13}$ и прибавяме съответно към първи, втори и трети ред – в резултат получаваме

$$B^{(4)} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{65} & -\frac{9}{13} & \frac{2}{13} & \frac{44}{65} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \frac{4}{13} & -\frac{32}{13} & \frac{10}{13} & \frac{18}{13} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -\frac{2}{13} & -\frac{10}{13} & \frac{8}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{65}{4} & 6 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{4} & 1 \end{array}\right).$$

В последната матрица $B^{(4)}$, за да получим единична матрица, пред разделителната черта умножаваме втори, трети и четвърти ред съответно с $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{4}{65}$. С тази последна операция, освен че получаваме единична матрица в първата половина, получаваме и обратната на A във втората половина на следващата матрица:

$$(I|A^{-1}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{65} & -\frac{9}{13} & \frac{2}{13} & \frac{44}{65} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{13} & \frac{16}{13} & -\frac{5}{13} & -\frac{9}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{4}{13} & \frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{24}{65} & -\frac{2}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{4}{65} \end{array}\right).$$

Следователно

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{65} & -\frac{9}{13} & \frac{2}{13} & \frac{44}{65} \\ -\frac{2}{13} & \frac{16}{13} & -\frac{5}{13} & -\frac{9}{13} \\ -\frac{1}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{4}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{24}{65} & -\frac{2}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{4}{65} \end{pmatrix}.$$

1.3. Метод на Холецки

Методите на Гаус и Гаус-Жордан са за решаване на системи с произволна $n \times n$ неособена матрица A. В практиката се срещат задачи, при които матрицата от коефициенти A е симетрична, за които се прилагат методи, използващи симетричността на A. Такъв метод е *методът на Холецки*, който е известен още като *метод на квадратния корен*. По този метод най-напред симетричната матрица A се разлага на произведение от две триъгълни матрици:

$$A = LL^T\,, \tag{1.1}$$

където L^T е транспонираната матрица на L, а L е долна триъгълна матрица. След разлагането (1.1) на A, системата $Ax = b$ се свежда до последователно решаване на две системи

$$Ly = b$$

и

$$L^T x = y$$

с триъгълни матрици L и L^T съответно, чрез прилагане на обратния ход на Гаус.

Нека елементите на L са ℓ_{ij}, тогава равенството (1.1) добива вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & \ell_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} & \cdots & \ell_{n1} \\ 0 & \ell_{22} & \cdots & \ell_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ell_{nn} \end{pmatrix}.$$

От последното равенство за елементите на първия ред на A имаме

$$a_{1j} = \ell_{11}\ell_{j1}\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,,$$

откъдето последователно получаваме

$$\begin{aligned} \ell_{11} &= \sqrt{a_{11}}\,, \\ \ell_{j1} &= \frac{a_{1j}}{\ell_{11}}, \qquad j = 2, 3, \ldots, n\,. \end{aligned}$$

За елементите на втория ред на A имаме

$$a_{2j} = \ell_{21}\ell_{j1} + \ell_{22}\ell_{j2}\,, \quad j = 2, 3, \ldots, n\,,$$

откъдето последователно получаваме

$$\begin{aligned} \ell_{22} &= \sqrt{a_{22} - \ell_{21}^2}\,, \\ \ell_{j2} &= \frac{a_{2j} - \ell_{21}\ell_{j1}}{\ell_{22}}, \qquad j = 3, 4 \ldots, n\,. \end{aligned}$$

Аналогично се получават останалите елементи, като от уравненията за елементите на k-ти ред на A се получават:

$$\begin{aligned} \ell_{kk} &= \sqrt{a_{kk} - \ell_{k1}^2 - \ell_{k2}^2 - \cdots - \ell_{k,k-1}^2}\,, \\ \ell_{jk} &= \frac{a_{kj} - \sum_{i=1}^{k-1} \ell_{ki}\ell_{ji}}{\ell_{kk}}, \qquad j = k+1, k+2, \ldots, n\,. \end{aligned}$$

Във формулите за пресмятане на елементите ℓ_{kk}, $k = 1, 2, \ldots, n$ е необходимо да се коренува. Това изисква изразът под корена да е неотрицателен, ако искаме да работим само с реални числа. Освен това, има деление на ℓ_{kk}, което предполага, че те трябва да са различни от нула. Всички тези предположения са удовлетворени, ако A е *положително определена матрица*.

Понеже проверката на една матрица дали е положително определена не е лека задача, при прилагане на метода на Холецки ще се ограничим с проверката за симетричност.

Пример 1.4. *Да се реши по метода на Холецки системата*

$$\left|\begin{aligned} 4x_1 + \;\; 6x_2 + 2x_3 &= \;\; 6 \\ 6x_1 + 10x_2 + 5x_3 &= 11 \\ 2x_1 + \;\; 5x_2 + 9x_3 &= 11\,. \end{aligned}\right.$$

Решение: Разлагаме матрицата от коефициенти A на системата на произведение от две триъгълни матрици: $A = LL^T$, т.е.

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 10 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} & \ell_{31} \\ 0 & \ell_{22} & \ell_{32} \\ 0 & 0 & \ell_{33} \end{pmatrix}.$$

Елементите на L пресмятаме последователно от уравненията, които получаваме при умножение на L и L^T. При умножение на първия ред на L с първия стълб на L^T се получава $4 = \ell_{11}^2$, откъдето $\ell_{11} = 2$. При умножение на първия ред на L с втория и третия стълб на L^T се получават съответно $6 = \ell_{11}\ell_{21}$ и $2 = \ell_{11}\ell_{31}$, откъдето $\ell_{21} = 6/\ell_{11} = 3$ и $\ell_{31} = 2/\ell_{11} = 1$.

При умножение на втория ред на L с втория стълб на L^T се получава $10 = \ell_{21}^2 + \ell_{22}^2$, откъдето $\ell_{22} = \sqrt{10 - \ell_{21}^2} = 1$. При умножение на втория ред на L с третия стълб на L^T се получава $5 = \ell_{21}\ell_{31} + \ell_{22}\ell_{32}$, откъдето $\ell_{32} = (5 - \ell_{21}\ell_{31})/\ell_{22} = 2$.

Последния неизвестен елемент ℓ_{33} определяме от уравнението $10 = \ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2$, което се получава при умножение на третия ред на L и третия стълб на L^T, откъдето $\ell_{33} = \sqrt{10 - \ell_{31}^2 - \ell_{32}^2} = 2$.

Следователно

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Разглеждаме разширената матрица на системата $Ly = b$,

$$B_1 = \left(\begin{array}{ccc|r} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \end{array}\right).$$

От първия ред на B_1 имаме $2y_1 = 6$, т.е. $y_1 = 3$. От втория ред на B_1 имаме $3y_1 + y_2 = 11$, откъдето $y_2 = 2$. От третия ред имаме $y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 11$, откъдето $y_3 = 2$.

Накрая решаваме системата $L^T x = y$ с разширена матрица

$$B_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Прилагаме обратния ход на Гаус за B_2, в резултат получаваме последователно: $x_3 = 1$, $x_2 = 0$ и $x_1 = 1$.

Понеже детерминантата на произведение от две матрици е произведението от техните детерминанти, т.е. $|AB| = |A||B|$, то методът на Холецки, освен за решаване на системи, може да се използва и за пресмятане на детерминанти на положително определени матрици (от 1.1 следва $|A| = |L|^2$). Например за матрицата на системата от пример 1.4 имаме

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 10 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}^2 = 16\,.$$

Задачи за самостоятелна работа

Задача 1.1. *Да се решат по методите на Гаус и Гаус-Жордан системите:*

$$a)\ \left|\begin{aligned} -x_1 - \ x_2 + 2x_3 &= \ 1 \\ 3x_1 + \ x_2 \qquad &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= \ 3\,; \end{aligned}\right. \qquad б)\ \left|\begin{aligned} x_1 - \ x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + \ x_2 - 2x_3 &= 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2\,; \end{aligned}\right.$$

$$в)\ \left|\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 7 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \ x_4 &= 3\,. \end{aligned}\right.$$

Задача 1.2. *Да се намерят обратните матрици по метода на Гаус-Жордан съответно на матриците:*

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad б)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 4 & 20 & 14 \\ 3 & 14 & 14 \end{pmatrix};$$

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; *г)* $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 1.3. *Да се решат по метода на Холецки системите:*

а) $\left| \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 8x_2 + 14x_3 &= 2\,; \end{aligned} \right.$ *б)* $\left| \begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 1\,; \end{aligned} \right.$

в) $\left| \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + 7x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 &= 1\,. \end{aligned} \right.$

Задача 1.4. *Да се пресметнат детерминантите на матриците от горните задачи с методите на Гаус и Холецки.*

§ 2. Итерационни методи за решаване на системи линейни уравнения

Този параграф е посветен на *итерационни методи* за решаване на системи линейни уравнения.

Итерационните методи се построяват, като преди това изходната система

$$Ax = b\,, \qquad |A| \neq 0 \tag{2.1}$$

се преобразува (подобно на $f(x) = 0$) в еквивалентна на нея система

$$x = x - C(Ax - b)\,, \tag{2.2}$$

където C е неособена матрица. Така формулата

$$x^{(k+1)} = B\,x^{(k)} + f\,, \tag{2.3}$$