1. СВОБОДЕН ВЕКТОР

В тази глава се разглеждат основните понятия и твърдения, отнасящи се до свободните вектори в равнината. След нейното усвояване ще можете:

- да определяте характеристиките на един свободен вектор;

- да нанасяте свободен вектор в произволна точка от равнината;

- да събирате свободни вектори;

- да умножавате свободен вектор с реално число;

- да решавате планиметрични задачи, като използвате свободни вектори.

1.1. ВЪВЕДЕНИЕ

При изучаването на математика в училище се отделя голямо място на планиметрията, чийто предмет са свойствата на различни геометрични фигури в равнината. Удобно средство за изразяване на част от тези свойства е двумерното векторно пространство, на което е посветена тази глава. Първо се дефинират понятията *насочена отсечка* и *свободен вектор*, а след това се въвеждат така наречените *афинни операции с вектори*. Използването на свободните вектори и афинните операции с тях позволяват точно да се формулират и ефектно да се решават задачи, свързани със среда на отсечка, медицентър на триъгълник, успоредник и трапец, условия три точки да лежат на една права и две прави да са успоредни.

1.2. ОСНОВНИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

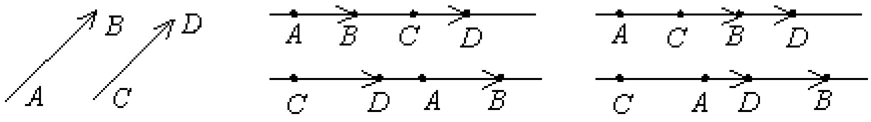
Определение 1. *Отсечка, на която единият край* A *се приема за първи, а другият край* B *за втори, се нарича насочена отсечка и се означава* $\overrightarrow{AB}$ (вж. фиг. 1.).

Всяка насочена отсечка има две характеристики - дължина и посока.

Дължината на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ е равна на дължината на отсечката AB, т.е. $|\overrightarrow{AB}|=|AB|$. Насочената отсечка $\overrightarrow{AA}$ се нарича нулева и единствено тя има дължина нула. За втората характеристика (посока) е необходимо да се разгледат два случая. Две ненулеви насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, които лежат на успоредни прави, наричаме еднопосочно колинеарни, ако точките B и D са в една полуравнина относно правата AC (фиг. 1а.). Две ненулеви насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, които лежат на една и съща права, наричаме еднопосочно колинеарни, ако:

- B е между A и C, а C е между B и D; или D е между C и A, а A е между D и B (фиг. 1б.);

- C е между A и B, но не е между B и D; или A е между C и D, но не е между D и B (фиг. 1в.).



а) б) в)

Фиг. 1.

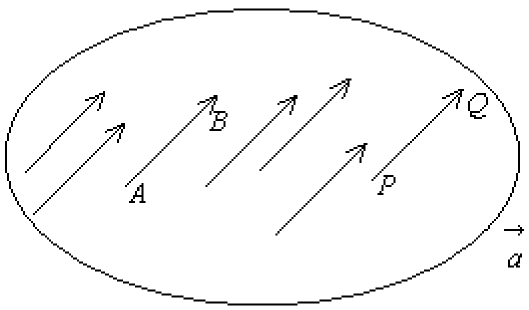
За еднопосочно колинеарни насочени отсечки използваме означението $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$. Две ненулеви насочени отсечки, които или лежат на една и съща права, или на две успоредни прави, наричаме противопосочно колинеарни, ако не са еднопосочно колинеарни. На фиг. 1. насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ са противопосочно колинеарни, което означаваме по следния начин: $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DC}$.

Две насочени отсечки имат една и съща посока, ако те удовлетворяват точно едно от горните условия за еднопосочно колинеарни насочени отсечки.

Определение 2. *Две насочени отсечки* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$ *са равни, ако те имат една и съща дължина и освен това са еднопосочно колинеарни. Записано символично:* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, *ако* $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ *и* $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

Например на фиг. 1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, но $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$.

Определение 3. *Множеството от една насочена отсечка* $\overrightarrow{AB}$ *и всички равни на нея насочени отсечки в равнината се нарича свободен вектор.*



Фиг. 2.

Свободният вектор се означава с малка латинска буква и стрелка отгоре, например $\vec{a}$. Насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ се нарича представител на свободния вектор $\vec{a}$, което се записва $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Ясно е, че свободният вектор се определя с всеки един от своите представители.

Ако P е произволна точка в равнината, съществува единствена точка Q такава, че насочената отсечка $\overrightarrow{PQ}$ е представител на свободния вектор $\vec{a}$. Наистина точка Q е четвъртият връх на успоредника $BAPQ$, т.е. еднозначно се определя от условията $PQ \| AB$ и $BQ \| AP$ (вж. фиг. 2.). Построяването на $\overrightarrow{PQ}$ се нарича нанасяне на свободния вектор $\vec{a}$ в точката P.

Свободният вектор с представител насочената отсечка $\overrightarrow{AA}$ се нарича нулев свободен вектор и се означава $\vec{o}$. Свободният вектор с представител $\overrightarrow{BA}$ се нарича противоположен на $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и се означава с $-\vec{a}$.

Съгласно *определение 3* всеки свободен вектор има същите характеристики, както характеристиките на насочена отсечка - дължина и посока, т.е. $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$, а посоката на $\vec{a}$ съвпада с посоката на $\overrightarrow{AB}$. Нещо повече, два свободни вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ са равни ($\vec{a} = \vec{b}$), еднопосочно колинеарни ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$) или противопосочно колинеарни ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$), когато съответно $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ или $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

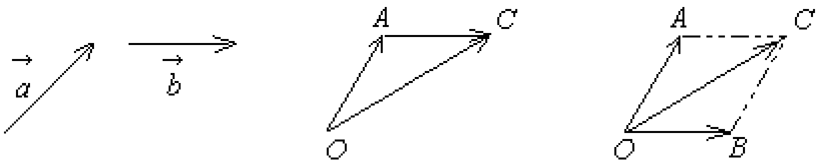
Два свободни вектора наричаме колинеарни (успоредни), ако всеки два техни представителя лежат върху успоредни или съвпадащи прави, т.е. когато свободните вектори са или еднопосочно колинеарни, или противопосочно колинеарни. Два свободни вектора наричаме перпендикулярни, ако всеки два техни представителя лежат върху перпендикулярни прави.

За краткост в следващото изложение вместо термина "свободен вектор" ще използваме термина "вектор". Означението $\overrightarrow{AB}$ ще използваме както за насочена отсечка, така и за свободен вектор, определен от тази насочена отсечка.

1.3. АФИННИ ОПЕРАЦИИ С ВЕКТОРИ

Събирането на вектори и умножението на вектор с реално число са две операции, които играят ключова роля при използването на вектори.

Определение 4.1. (правило на триъгълника за събиране на вектори). *Сбор на два вектора* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *наричаме трети вектор* $\vec{c}$*, определен по следния начин: ако* O *е произволна точка в равнината,* $\overrightarrow{OA}$ *е представител на* $\vec{a}$ *и* $\overrightarrow{AC}$ *е представител на* $\vec{b}$*, то насочената отсечка* $\overrightarrow{OC}$ *е представител на* $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$*. Съкратено записано, ако* $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$*,* $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$*, то* $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ (фиг. 3а. и 3б.).



а) б) в)

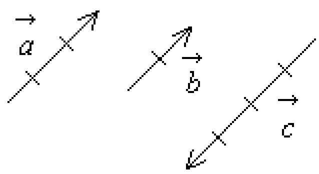
Фиг. 3.

Определение 4.2. (правило на успоредника за събиране на вектори). *Сбор на два вектора* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *наричаме трети вектор* $\vec{c}$*, определен по следния начин: ако* O *е произволна точка,* $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ *и* $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$*, построяваме успоредника* $AOBC$ *(*фиг. 3а и 3в*). Тогава* $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}=\overrightarrow{OC}$.

Двете определения за събиране на вектори са еквивалентни, така че ние можем да използваме с еднакъв успех, както едното, така и другото.

Определение 5. *Произведение на реалното число* λ *и свободния вектор* $\vec{a}$ *се нарича векторът* $\vec{p}$*, определен от условията:* 1) $|\vec{p}|=|\lambda|.|\vec{a}|$; 2) $\vec{p}\uparrow\uparrow\vec{a}$ *при* $\lambda>0$ *и* $\vec{p}\uparrow\downarrow\vec{a}$ *при* $\lambda<0$.

На фиг. 4. са дадени представителите на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}=\frac{2}{3}\vec{a}$ и $\vec{c}=-\frac{4}{3}\vec{a}$.



Фиг. 4.

Двете операции - събиране на вектори и умножение на реално число с вектор - се наричат афинни (или линейни) операции с вектори. От определенията следват осем основни свойства на тези операции. Ако $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са вектори, а λ и μ - реални числа, то

са изпълнени:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

2. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

3. $\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$ за всеки вектор $\vec{a}$

4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{o}$ за всеки вектор $\vec{a}$

5. $1.\vec{a}=\vec{a}$

6. $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$

7. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

8. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$

Първите четири свойства се отнасят за събирането на вектори, а останалите - за умножението на реално число с вектор.

Определение 6. *Множеството на всички свободни вектори в равнината заедно с афинните операции, които удовлетворяват изброените осем свойства, се нарича двумерно векторно пространство.*

1.4. ПРИЛОЖЕНИЕ НА АФИННИТЕ ОПЕРАЦИИ С ВЕКТОРИ

Сега ще докажем твърдения, които интерпретират факти от геометрията посредством векторна терминология.

Теорема 1. *Два вектора* $\vec{a}\neq\vec{o}$ *и* $\vec{b}$ *са колинеарни точно тогава, когато съществува реално число* λ *такова, че* $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ *.*

Доказателство. Нека $\vec{a}\neq\vec{o}$ и $\vec{b}$ са колинеарни, т.е. $\vec{a}\,||\,\vec{b}$. Тогава, ако $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ и

$\lambda = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, то $\vec{b} = \lambda \vec{a}$. Аналогично, ако $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ и $\lambda = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, то $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

Обратно, нека $\vec{b} = \lambda \vec{a}$. Тогава според *определение 5*, двата вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни.

Непосредствено от *теорема 1* получаваме следните твърдения.

Следствие 1.1. *Ако A, B и C са три точки в равнината и A е различна от B, то точка C лежи на правата AB, т.е. трите точки лежат на една права, точно когато съществува число $\lambda \in \mathbf{R}$ такова, че $\vec{AC} = \lambda \vec{AB}$.*

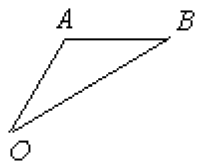
Следствие 1.2. *Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник в равнината. Тогава*

а) $ABCD$ е успоредник точно когато $\vec{AB} = \vec{DC}$;

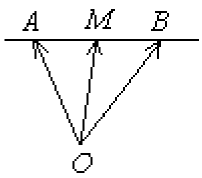
б) $ABCD$ е трапец точно когато $\vec{DC} = \lambda \vec{AB}$ (λ е положително реално число, различно от 1) *или $\vec{BC} = \mu \vec{AD}$ (μ е положително реално число, различно от* 1).

Теорема 2. *Нека O, A и B са три точки в равнината. Тогава е изпълнено векторното равенство $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$.*

Доказателство. Съгласно правилото на триъгълника за събиране на вектори $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$ (фиг. 5.). Оттук и от свойствата на афинните операции веднага следва $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Теорема 3. *Нека точка M е среда на отсечката AB, а O е произволна точка в равнината. Тогава е изпълнено векторното равенство $\vec{OM} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OB}\right)$.*

Доказателство. Понеже M е среда на отсечката AB, то $\vec{AM} = \vec{MB}$ (фиг. 6.). От *теорема 2* следва, че $\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}$ и $\vec{MB} = \vec{OB} - \vec{OM}$. Тогава $\vec{OM} - \vec{OA} = \vec{OB} - \vec{OM}$

или $2\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$. С това доказателството е завършено.

1.5. ПРИМЕРНИ ЗАДАЧИ

Теоремите от предната точка са удобно средство при решаване на планиметрични задачи.

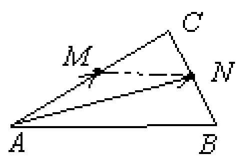
Задача 1. В ΔABC точка M е среда на AC, а N е среда на BC. Да се докаже, че $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ (фиг. 7.).

Решение. Условието M да е среда на AC, записано във векторна форма е $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AC}$. От *теорема 3* следва, че $\vec{AN} = \frac{1}{2}\left(\vec{AC} + \vec{AB}\right)$. Накрая като приложим *теорема 2*, получаваме $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{1}{2}\left(\vec{AC} + \vec{AB}\right) - \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

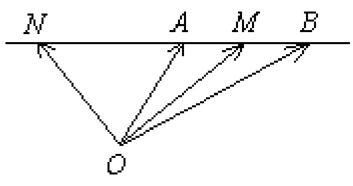
Задача 2. Точка M дели отсечката AB вътрешно в отношение 2:3, а точка N дели същата отсечка външно в отношение 2:3 (фиг. 8.). Ако O е произволна точка в равнината, да се докажат равенствата: $\vec{OM} = \frac{1}{5}\left(3\vec{OA} + 2\vec{OB}\right)$, $\vec{ON} = 3\vec{OA} - 2\vec{OB}$.

Решение. Тъй като M дели вътрешно AB в отношение 2:3, то $|AM| : |BM| = 2:3$ и $\vec{AM} = -\frac{2}{3}\vec{BM}$. От *теорема 2* получаваме $\vec{OM} - \vec{OA} = -\frac{2}{3}\left(\vec{OM} - \vec{OB}\right)$ или $\frac{5}{3}\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OB}$. Оттук следва, че $\vec{OM} = \frac{1}{5}\left(3\vec{OA} + 2\vec{OB}\right)$.

За точка N е изпълнено $|AN| : |BN| = 2:3$ и $\vec{AN} = \frac{2}{3}\vec{BN}$. След прилагане на *теорема 2* $\vec{ON} - \vec{OA} = \frac{2}{3}\left(\vec{ON} - \vec{OB}\right)$ или $\frac{1}{3}\vec{ON} = \vec{OA} - \frac{2}{3}\vec{OB}$. Оттук $\vec{ON} = 3\vec{OA} - 2\vec{OB}$.



Фиг. 7.

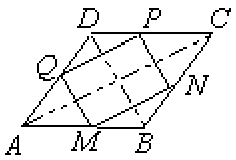


Фиг. 8.

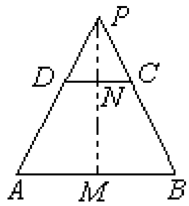
Задача 3. Даден е ромб $ABCD$. Ако M е среда на AB, N - среда на BC, P - среда на CD и Q - среда на DA, да се докаже, че четириъгълникът $MNPQ$ е правоъгълник.

Решение. От *задача 1* следва, че $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

Оттук $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, т.е. $MNPQ$ е успоредник (фиг. 9.). Тъй като страните на този успоредник са успоредни на диагоналите на дадения ромб, то $MNPQ$ е правоъгълник.



Фиг. 9.



Фиг. 10.

В следващите две задачи ще използваме *следствие 1.1.* и *следствие 1.2*.

Задача 4. В трапеца $ABCD$ средите на основите AB и CD са означени съответно с M и N. Ако $P = AD \cap BC$ е пресечна точка на бедрата на трапеца, да се докаже, че точките P, M и N лежат на една права (фиг. 10.).

Решение. Тъй като AB и CD са основите на трапеца, то $\overrightarrow{DC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ и $0 < \lambda < 1$ (фиг. 10.). От подобността на триъгълниците DCP и ABP следва $\frac{|PD|}{|PA|} = \frac{|PC|}{|PB|} = \frac{|DC|}{|AB|} = \lambda$. Освен това $\overrightarrow{PD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{PC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{PB}$. Оттук получаваме $\overrightarrow{PD} = \lambda \overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{PC} = \lambda \overrightarrow{PB}$. Като приложим *теорема 3,* то $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PC}\right) = \lambda \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\right) = \lambda \overrightarrow{PM}$. От векторното равенство $\overrightarrow{PN} = \lambda \overrightarrow{PM}$ заключаваме, че точките P, M и N лежат на една права.

Задача 5. Даден е успоредник $ABCD$. Точка M лежи на страната AD и $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$. Точка P лежи на диагонала AC и $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, а точка N е среда на страната BC (фиг. 11.).

а) Векторите $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{BM}$ да се изразят чрез векторите $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

б) Да се докаже, че точките P, M и N лежат на една права и да се пресметне отношението $|PM|:|PN|$.

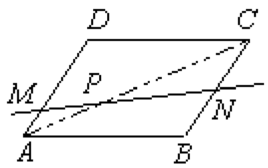
Решение. а) По правилото на успоредника за събиране на вектори $\vec{AP}=\frac{1}{4}\vec{AC}=\frac{1}{4}\left(\vec{AB}+\vec{AD}\right)=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, а по правилото на триъгълника $\vec{AN}=\vec{AB}+\vec{BN}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$. От Теорема 2 следва, че $\vec{BM}=\vec{AM}-\vec{AB}=\frac{1}{6}\vec{b}-\vec{a}$.

б) Отново като приложим *теорема 2* получаваме

$$\vec{PM}=\vec{AM}-\vec{AP}=\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=-\frac{1}{12}\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)$$

$$\vec{PN}=\vec{AN}-\vec{AP}=\left(\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{1}{4}\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)$$

, . Тогава от равенството $\vec{PM}=-\frac{1}{3}\vec{PN}$ следва, че точките P, M и N лежат на една права и $|PM|:|PN|=\frac{1}{3}$.



Фиг. 11.

ЗА САМОПОДГОТОВКА

Упражнения

1. Даден е трапец $ABCD$, като $AB\,||\,DC$. Ако M е среда на AD, а N е среда на BC, да се докаже, че $\vec{MN}=\frac{1}{2}\left(\vec{AB}+\vec{DC}\right)$.

Упътване. Да се приложи *теорема 2*.

2. Точка M дели вътрешно в отношение 7:4 отсечката AB, а точката N дели външно в отношение 7:4 същата отсечка. Ако O е произволна точка в равнината, да се докажат равенствата: $\vec{OM}=\frac{1}{11}\left(4\,\vec{OA}+7\vec{OB}\right)$ и

$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}\left(7\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OA}\right)$.

3. Ако G е медицентърът на триъгълника ABC, а O е произволна точка в равнината, да се докаже равенството $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

Упътване. Ако M е средата на BC, медицентърът G лежи на медианата AM и я дели вътрешно в отношение 2:1.

4. Нека A, B и C са три точки от една права, като $A \neq B$ и $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$). За произволна точка O в равнината да се докаже равенството $\overrightarrow{OC} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$.

5. Даден е трапец $ABCD$, като $AB \parallel DC$. Ако M е среда на основата AB, N е среда на другата основа DC, а S е пресечна точка на диагоналите на трапеца, да се докаже, че точките S, M и N лежат на една права.

6. Даден е успоредникът $ABCD$. Точка P лежи на страната $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$, точка Q лежи на диагонала AC и $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. Да се докаже, че точките P, Q и B лежат на една права и да се пресметне отношението $|BP| : |BQ|$.

7. Даден е правоъгълник $ABCD$. Ако M е среда на AB, N - среда на BC, P - среда на CD и Q - среда на DA, да се докаже, че четириъгълникът $MNPQ$ е ромб.

8. Даден е трапец $ABCD$, като $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{DC}$. Ако точка M е среда на BC, да се изразят векторите $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{DM}$ чрез векторите $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

Библиография

В заключение ще посочим учебна литература, в която по-подробно се разглежда тематиката от тази и следващите две глави.

1. Станилов, Гр. Аналитична геометрия. София: Софтех, 1998.
2. Христов, М. Аналитична геометрия. Велико Търново: Астарта, 2003.
3. Мекеров, Д., Рангелова, П., Царева, Б., Павлов, Е. Ръководство за решаване на задачи по аналитична геометрия. Пловдив: УИ "Паисий Хилендарски", 1994.
4. Михова, В. Ръководство по аналитична геометрия. София: УИ "Св. Климент Охридски", 1998.

2. ДЕКАРТОВА КООРДИНАТНА СИСТЕМА В РАВНИНАТА

В тази глава се въвеждат координати на точки и вектори относно декартова координатна система в равнината. След нейното усвояване ще можете:

- да определяте координатите на точки и вектори в равнината;

- да определяте дали са колинеарни, или не два вектора, зададени с координатите си;

- да определяте взаимното положение на три точки, зададени с координатите си;

- да решавате с координати планиметрични задачи, отнасящи се до среда на отсечка, успоредни прави, трапец и успоредник.

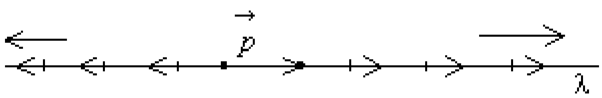
2.1. ВЪВЕДЕНИЕ

Свободните вектори и афинните операции с тях не са единственото средство за описание на свойствата на геометричните фигури в равнината. Използването на координати позволява да се разширят методите, разгледани в предната глава. Първо въвеждаме координатна ос, а след това - декартова координатна система в равнината. Връзката между координати на точки и координати на вектори води до лесно определяне взаимното положение както на точки, така и на прави в равнината. Като се използват едновременно афинните операции с вектори и координати, се решават някои типични задачи за среда на отсечка, проверка на условието три точки да лежат на една права, трапец и успоредник.

2.2. ПОСОКА ВЪРХУ ПРАВА. КООРДИНАТНА ОС

Нека λ е права, а $\vec{p}$ е фиксиран ненулев вектор върху нея. Тогава всички ненулеви вектори върху λ се разделят на два непресичащи се класа. Векторите от първия клас са еднопосочно колинеарни с $\vec{p}$, а векторите от втория са противопосочно колинеарни с $\vec{p}$. Всеки един от тези два класа съдържа само еднопосочно колинеарни вектори и се нарича посока. С други думи

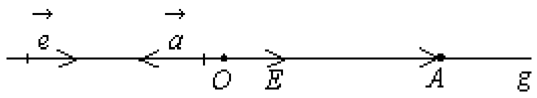
върху всяка права λ има точно две посоки (фиг. 1.).



Фиг.1.

Права с фиксирана посока върху нея се нарича ос. От предните разглеждания следва, че за да се превърне една права в ос, е достатъчно да се зададе ненулев вектор върху нея.

Нека върху правата g е фиксиран вектор $\vec{e}$ с дължина 1, т.е. g е ос. Всеки вектор $\vec{a}$ върху g е колинеарен с $\vec{e}$ и според *теорема 1* от *глава I* съществува единствено реално число λ такова, че $\vec{a} = \lambda \vec{e}$. Ако $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{e}$, то $\lambda > 0$, а от $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{e}$ следва $\lambda < 0$. Обратното също е вярно, т.е. ако $\lambda > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{e}$, а от $\lambda < 0$ следва $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{e}$. Ясно е, че числото λ е дължината на вектора $\vec{a}$, взета със знак "+" или "-" в зависимост от това, дали $\vec{a}$ е еднопосочно колинеарен, или противопосочно колинеарен с $\vec{e}$. Сега предполагаме, че освен вектора $\vec{e}$ върху правата g е фиксирана и точка O (вж фиг. 2). Тогава за всяка точка $A \in g$ еднозначно са определени векторът $\vec{OA}$ и числото $x \in \mathbf{R}$ от векторното равенство $\vec{OA} = x \vec{e}$ (тъй като за колинеарните вектори $\vec{OA}$ и $\vec{e} \neq \vec{0}$ можем да приложим *теорема 1* от *глава 1*).



Фиг. 2.

Следователно, ако върху една права g са фиксирани единичен вектор $\vec{e}$ и точка O, то на всеки вектор $\vec{a}$ върху g се съпоставя единствено число $\lambda \in \mathbf{R}$, определено от равенството $\vec{a} = \lambda \vec{e}$, а на всяка точка $A \in g$ се съпоставя единствено число $x \in \mathbf{R}$, определено от равенството $\vec{OA} = x \vec{e}$. Права g с фиксирана точка $O \in g$ и фиксиран единичен вектор $\vec{e}$ върху нея се нарича координатна ос, а двойката $O\vec{e}$ се нарича нормирана координатна система върху правата g. Числото x се нарича координата на точка A относно координатната система $O\vec{e}$ и това се означава с $A(x)$. Числото λ се нарича координата на вектора $\vec{a}$ относно $O\vec{e}$ и се означава $\vec{a}(\lambda)$. Нека насочената отсечка $\vec{OE}$ е представител на вектора $\vec{e}$, т.е. $\vec{e} = \vec{OE}$. Тогава точка O има координата 0, а точка E координата 1, което записваме $O(0)$, $E(1)$.

Връзката между координатите на точките и координатите на векторите се дава от следващото:

Твърдение 1. *Ако спрямо координатната система* $O\vec{e}$ *върху правата* g *точките* $A \in g$ *и* $B \in g$ *имат съответно координати* x_1 *и* x_2*, то координатата на вектора* $\vec{AB}$ *спрямо* $O\vec{e}$ *е* $x_2 - x_1$.

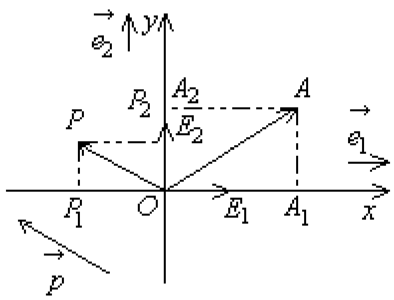
Доказателство. Според определението за координата на точка $\vec{OA} = x_1\vec{e}$ и $\vec{OB} = x_2\vec{e}$. От т*еорема 2* в г*лава I* следва $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = x_2\vec{e} - x_1\vec{e} = (x_2 - x_1)\vec{e}$, т.е. координатата на вектора $\vec{AB}$ е $x_2 - x_1$.

За илюстрация на това твърдение, ако $A(-2)$ и $B(3)$ са две точки от правата g, то векторът $\vec{AB}$ е с координата $3-(-2)$, т.е. $\vec{AB}(5)$. По същия начин, ако $C(2)$ и $D(6)$ са точки от g, то $\vec{CD}$ е вектор с координата 4.

2.3. КООРДИНАТИ НА ТОЧКИ И ВЕКТОРИ В РАВНИНАТА

Нека O е фиксирана точка в равнината, а $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ са два

единични и перпендикулярни вектора в равнината, т.е. $|\vec{e_1}|=|\vec{e_2}|$ и $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$. Тогава тройката $O\vec{e_1}\vec{e_2}$ наричаме декартова координатна система в равнината. Ако $\vec{OE_1} = \vec{e_1}$, то правата OE_1 е координатна ос, определена с точка O и вектор $\vec{e_1}$, означаваме я с Ox. Аналогично, ако $\vec{OE_2} = \vec{e_2}$, правата OE_2 е координатна ос, определена с точка O и вектор $\vec{e_2}$, която означаваме с Oy (фиг. 3.). Тогава за декартовата координатна система $O\vec{e_1}\vec{e_2}$ се използва също и означението Oxy .



Фиг. 3.

Точка O се нарича начало на координатната система, а векторите $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ базисни вектори, Ox - абсцисна ос, Oy - ординатна ос.

Нека A е произволна точка в равнината. Векторът $\overrightarrow{OA}$ се нарича радиус-вектор на точка A. Означаваме с A_1 и A_2 ортогоналните проекции на A съответно върху осите Ox и Oy (фиг. 3.). Тогава по правилото на успоредника за събиране на вектори $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$. Съгласно предната точка съществуват реални числа x и y такива, че $\overrightarrow{OA_1} = x\overrightarrow{OE_1}$ и $\overrightarrow{OA_2} = y\overrightarrow{OE_2}$. Така получаваме следното представяне на радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ на точката A:

(1) $\overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$

Определение 1. *Наредената двойка реални числа (x,y) се нарича двойка координати на точка A относно декартовата координатна система $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} = Oxy$. Числото x се нарича абсциса, а числото y - ордината на точката A.*

За точка A с координати (x,y) се използва означението $A(x,y)$.

Равенство (1) определя едно съответствие между точките от равнината и двойките реални числа, т.е. техните координати. Това съответствие притежава следните свойства:

- на всяка точка A от равнината отговаря една наредена двойка (x,y), определена с равенство (1);

- на две различни точки A и B отговарят различни двойки (x_1,y_1) и (x_2,y_2), т.е. изпълнено е поне едно от неравенствата $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$;

- за всяка наредена двойка (x_0,y_0) съществува точка M от равнината, на която координатите са (x_0,y_0).

Нека $\overrightarrow{p}$ е произволен вектор в равнината, а насочената отсечка $\overrightarrow{OP}$ е неговият представител с начало O, т.е. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{p}$ (вж. фиг. 3.). Ако P_1 и P_2 са ортогоналните проекции на точка P съответно върху Ox и Oy, то съществуват λ_1 и λ_2 такива, че $\overrightarrow{OP_1} = \lambda_1\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{OP_2} = \lambda_2\overrightarrow{e_2}$. Според правилото на успоредника за събиране на вектори $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = \lambda_1\overrightarrow{e_1} + \lambda_2\overrightarrow{e_2}$. Следователно векторът $\overrightarrow{p}$ по единствен начин се представя чрез векторите $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$:

(2) $\overrightarrow{p} = \lambda_1\overrightarrow{e_1} + \lambda_2\overrightarrow{e_2}$

Определение 2. *Наредената двойка реални числа* (λ_1, λ_2) *се нарича двойка координати на вектора* $\vec{p}$ *относно декартова координатна система* $O\vec{e_1}\vec{e_2}$.

За вектора $\vec{p}$ с координати (λ_1, λ_2) се използва означението $\vec{p}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Равенството (2) определя едно съответствие между векторите в равнината и наредените двойки реални числа, т.е. техните координати. Ясно е, че на различни вектори отговарят различни двойки реални числа, а за всяка двойка $(\lambda_1^0, \lambda_2^0)$ съществува вектор $\vec{p_0}$ с координати $(\lambda_1^0, \lambda_2^0)$.

От двете определения веднага следва една връзка между координатите на точка и координатите на вектор.

Твърдение 2. *Координатите* (x, y) *на точка* A *са същите както координатите на нейния радиус-вектор* $\vec{OA}$ *, т.е.* $\vec{OA}(x, y)$.

В заключение ще посочим координатите на някои точки и вектори в равнината: $O(0,0)$, $E_1(1,0)$, $E_2(0,1)$, $\vec{e_1}(1,0)$ и $\vec{e_2}(0,1)$. Точка $B(x, y)$ лежи върху оста Ox , точно когато $y = 0$, $C(x, y) \in Oy$ точно когато $x = 0$. Аналогично $\vec{q}(x, y) \parallel Ox \parallel \vec{e_1} \Leftrightarrow y = 0$ и $\vec{r}(x, y) \parallel Oy \parallel \vec{e_2} \Leftrightarrow x = 0$.

2.4. ПРИЛОЖЕНИЕ НА КООРДИНАТИТЕ

В тази точка ще дадем интерпретация на теоремите от *глава I* в термините на координати на точки и вектори. Предполагаме, че в равнината е фиксирана декартова координатна система $O\vec{e_1}\vec{e_2} = Oxy$ и координатите на всички точки и вектори са отнесени спрямо нея.

Теорема 1. *Два вектора* $\vec{a}(\lambda_1, \lambda_2) \neq \vec{o}(0,0)$ и $\vec{b}(\mu_1, \mu_2)$ са колинеарни точно когато координатите им са пропорционални, т.е. съществува реално число k такова, че $\mu_1 = k\lambda_1$ и $\mu_2 = k\lambda_2$.

Доказателство. Нека първо векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни, т.е. техните представители лежат на успоредни или съвпадащи прави. Съгласно *теорема 1* от *глава I* съществува $k \in \mathbf{R}$, такова че $\vec{b} = k\,\vec{a}$. Оттук $\mu_1 \vec{e_1} + \mu_2 \vec{e_2} = k(\lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2})$, т.е. $\mu_1 = k\lambda_1$ и $\mu_2 = k\lambda_2$.

Обратно, ако $\mu_1 = k\lambda_1$ и $\mu_2 = k\lambda_2$, то $\vec{b} = k\vec{a}$. Тогава според *определение 5* от *глава 1* векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни.

Сега ще докажем едно обобщение на *твърдение 1*, което дава втора връзка между координатите на точка и координатите на вектор.

Теорема 2. *Ако* $A(x_1, y_1)$ *и* $B(x_2, y_2)$ *са две точки в равнината, то координатите* (λ_1, λ_2) *на вектора* $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ *са* $\lambda_1 = x_2 - x_1$ *и* $\lambda_2 = y_2 - y_1$.

Доказателство. За координатното начало O, A и B прилагаме *теорема 2* от *глава I*. Това означава, че е изпълнено векторното равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Като използваме, че координатите на точките съвпадат с координатите на техните радиус-вектори, получаваме

$$\lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} = x_2\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} - x_1\vec{e_1} - y_1\vec{e_2} = (x_2 - x_1)\vec{e_1} + (y_2 - y_1)\vec{e_2}.$$

Оттук $\lambda_1 = x_2 - x_1$ и $\lambda_2 = y_2 - y_1$.

Теорема 3. *Ако* $A(x_1, y_1)$ *и* $B(x_2, y_2)$ *са две точки в равнината, а точка* $M(x_0, y_0)$ е среда на отсечката AB, то $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ и $y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$.

Доказателство. Съгласно *теорема 3* от *глава I* за радиус-векторите $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ е изпълнено равенството $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$, откъдето следва $x_0\vec{e_1} + y_0\vec{e_2} = $
$= \frac{1}{2}\left(x_1\vec{e_1} + y_1\vec{e_2} + x_2\vec{e_1} + y_2\vec{e_2}\right) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\vec{e_1} + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\vec{e_2}$. Като приравним коефициентите пред $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$, получаваме $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ и $y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$.

Използването на тези три теореми създава удобство при работа с координати. Това ще го покажем в следващата точка.

2.5. ПРИМЕРНИ ЗАДАЧИ

В условията и решенията на всички задачи предполагаме, че координатите на точките и векторите са спрямо фиксирана декартова координатна система в равнината.

Задача 1. Дадени са точките $A(2,3)$, $B(4,1)$ и $C(6,-1)$. Да се докаже, че трите точки лежат на една права и да се намери отношението $|AC|:|BC|$.

Решение. От *теорема 2* следва, че $\overrightarrow{AB}(2,-2)$ и $\overrightarrow{AC}(4,-4)$, а от *теорема 1* следва $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$. Като приложим *следствие 1.1* от *глава I*, заключаваме, че A, B и C лежат на една права. Тъй като векторите $\overrightarrow{AC}(4,-4)$ и $\overrightarrow{BC}(2,-2)$ са колинеарни и $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}$, то $|AC|:|BC|=2$.

Задача 2. Дадени са три вектора $\vec{a}(1,-1)$, $\vec{b}(1,1)$ и $\vec{c}(5,-3)$ в равнината. Да се намерят реални числа λ и μ такива, че

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{c}.$$

Решение. Като използваме *определение 2* за координати на вектор, равенството $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{c}$ приема вида $\lambda(\vec{e_1}-\vec{e_2})+\mu(\vec{e_1}+\vec{e_2})=5\vec{e_1}-3\vec{e_2}$. Оттук $(\lambda+\mu)\vec{e_1}+(\mu-\lambda)\vec{e_2}=$

$=5\vec{e_1}-3\vec{e_2}$. В последното равенство приравняваме коефициентите пред $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ и получаваме системата $\left|\begin{array}{l}\lambda+\mu=5\\ -\lambda+\mu=-3\end{array}\right.$. Решенията на тази система са $\lambda=4$, $\mu=1$. Следователно $4\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.

Задача 3. Дадени са точките $A(2,-1)$, $B(6,5)$ и $C(1,3)$. Да се намерят:

а) координатите на средата M на отсечката AB;

б) координатите на точка D, такава че C е среда на отсечката BD.

Решение. а) Според *теорема 3* точка $M(x_0,y_0)$ има координати $x_0=\frac{1}{2}(2+6)$ и $y_0=\frac{1}{2}(-1+5)$, т.е. $M_0(4,2)$.

б) Нека (x,y) са координатите на D. Тогава от *теорема* 3, приложена за средата $C(1,3)$ на отсечката BD, следват равенствата $1=\frac{1}{2}(6+x)$ и $3=\frac{1}{2}(5+y)$. Оттук $x=-4$ и $y=1$, т.е. $D(-4,1)$.

Задача 4. За успоредника $ABCD$ са известни върховете $A(1,1)$, $B(2,4)$ и $C(-2,5)$. Да се намерят координатите на четвъртия връх D.

Решение. Нека (x,y) са координатите на D. Тогава, като приложим *теорема 2*, намираме координатите на векторите $\overrightarrow{AB}(1,3)$ и $\overrightarrow{DC}(-2-x,5-y)$. Според *следствие 1.2* от *глава 1* $ABCD$ е успоредник, когато $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, т.е. $1=-2-x$ и $3=5-y$.

Оттук $x=-3$, $y=2$ или $D(-3,2)$.

Задача 5. Дадени са точките $P(1,3)$, $Q(3,-3)$, $R(4,0)$ и $S(3,3)$. Да се докаже, че:

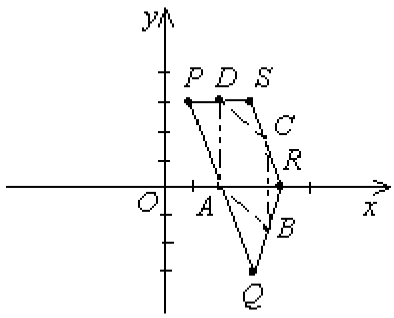
а) четириъгълникът $PQRS$ е трапец;

б) ако A е среда на PQ, B - среда на QR, C - среда на RS и D - среда на SP, то четириъгълникът $ABCD$ е успоредник (фиг. 4.).

Решение. а) Прилагайки *теорема 2*, забелязваме, че

векторите $\overrightarrow{PQ}(2,-6)$ и $\overrightarrow{SR}(1,-3)$ имат пропорционални координати. Следователно $\overrightarrow{SR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$. Тогава съгласно *следствие 1.2* от *глава 1* четириъгълникът $PQRS$ е трапец.

б) Прилагайки *теорема 3*, получаваме координатите на средите $A(2,0)$, $B(3{,}5;-1{,}5)$, $C(3{,}5;1{,}5)$ и $D(2,3)$. Тогава векторите $\overrightarrow{AB}(1{,}5;-1{,}5)$ и $\overrightarrow{DC}(1{,}5;-1{,}5)$ са равни, а векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}(0,3)$ не са колинеарни според *теорема 1*. Оттук съгласно *следствие 1.2* от *глава 1* четириъгълникът е успоредник.



Фиг. 4.

Задача 6. Дадени са точките $A(-1,4)$ и $B(2,2)$. Да се намерят координатите на точка C такава, че да е изпълнено векторното равенство $\overrightarrow{AC}=3.\overrightarrow{AB}$.

Решение. Ако x и y са координатите на C, то $\overrightarrow{AC}(x+1;y-4)$ или $\overrightarrow{AC}=(x+1)\vec{e_1}+(y-4)\vec{e_2}$. От $\overrightarrow{AB}(3;-2)$ следва, че $3\overrightarrow{AB}=9\vec{e_1}-6\vec{e_2}$. Тогава равенството $\overrightarrow{AC}=3.\overrightarrow{AB}$ може да се запише във вида $(x+1)\vec{e_1}+(y-4)\vec{e_2}=9\vec{e_1}-6\vec{e_2}$. Оттук $x+1=9$, $y-4=-6$, т.е. $C(8,-2)$.

ЗА САМОПОДГОТОВКА

Упражнения

1. Дадени са точките $A(2,3)$, $B(-1;5)$, $C(-4;7)$ и $D(8,2)$. Да се докаже, че точката C лежи на правата AB, а точка D не лежи на правата AB.

2. Да се намерят координатите на точка B, която е симетрична на точка $A(4,-3)$ относно точка $P(2,2)$.

Упътване. Използвайте, че точка P е среда на отсечката AB.

3. Дадени са два съседни върха $A(-3,5)$ и $B(1;7)$ на успоредника $ABCD$. Ако точка $P(1,1)$ е пресечната точка на диагоналите на успоредника, намерете координатите на другите два върха C и D.

4. За успоредника $ABCD$ са дадени върховете $A(2,3)$, $B(4;-1)$ и $C(0,5)$. Да се намерят координатите на:

а) четвъртият връх D на успоредника;

б) средата M на страната AD;

в) пресечната точка на диагоналите на успоредника.

5. В равнината са дадени точките $A(3,-1)$ и $B(5;2)$ и векторите $\vec{p}(1,2)$ и $\vec{q}(2,1)$. Да се намерят числа λ и μ такива, че $\vec{AB} = \lambda\,\vec{p} + \mu\,\vec{q}$.

6. Дадени са точките $P(2,0)$ и $Q(0,6)$. Върху правата PQ е дадена точка S такава, че $\vec{PS} = 2\,.\,\vec{QS}$. Да се намерят координатите на точка S.

3. СКАЛАРНО ПРОИЗВЕДЕНИЕ НА ДВА ВЕКТОРА

В тази глава се въвежда нова операция с вектори, при която резултатът е число. Тази операция се нарича скаларно произведение и има различни приложения. След усвояването на определението и пет твърдения Вие ще можете при зададена декартова координатна система да пресмятате:

- скаларното произведение на два вектора;

- косинуса на елементарно-геометричния ъгъл между два вектора;

- разстоянието между две точки;

- дължините на медианите и ъглополовящите на един триъгълник;

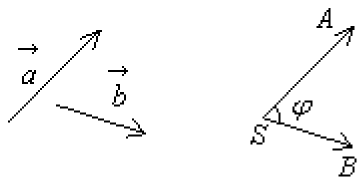
- координатите на ортоцентъра и центъра на описаната окръжност на един триъгълник.

3.1. ВЪВЕДЕНИЕ

Събирането на вектори и умножението на вектор с число са две операции, с които се описват успоредност, условие три точки да лежат на една права, геометрични фигури като успоредник и трапец. За описание на други геометрични свойства, като перпендикулярност, ъгъл между два вектора, разстояние между две точки, е необходимо да се дефинира друга операция с вектори, така нареченото скаларно произведение. Освен основните свойства на това произведение ние се спираме на формулите за скаларно произведение и разстояние между точки при декартова координатна система. Типичните случаи, в които се използват тези формули, както и начините за прилагането им са дадени в решените примери.

3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НА СКАЛАРНО ПРОИЗВЕДЕНИЕ НА ДВА ВЕКТОРА

Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са два вектора в равнината. Елементарно-геометричен ъгъл $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$ между двата вектора ще наричаме ъгъла, определен по следния начин: ако $\overrightarrow{SA}$ и $\overrightarrow{SB}$ са представители на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в произволна точка S, т.е. $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, то $\varphi = \angle ASB$ (фиг. 1.). Очевидно $\varphi \in [0, \pi]$,



Фиг. 1.

или равносилно $\varphi \in [0°, 180°]$.

Определение 1. *Скаларно произведение на два ненулеви вектора* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *се нарича числото, равно на произведението*

$$|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\varphi,$$

където φ *е елементарно-геометричният ъгъл между* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$. *Ако поне един от векторите* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *е равен на нулевия вектор, то скаларното произведение на* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *е числото* 0.

Скаларното произведение на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ще означаваме с $\vec{a}\,\vec{b}$.

Скаларен квадрат $\vec{a}^{\,2}$ на вектора $\vec{a}$ ще наричаме числото $\vec{a}^{\,2}=\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|.|\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2$.

Да отбележим четири свойства на скаларното произведение, следващи непосредствено от определението:

1. $\vec{a}\,\vec{b}=\vec{b}\,\vec{a}$.
2. $(\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda(\vec{a}\,\vec{b})$, $\lambda\in\mathbf{R}$.
3. $\vec{a}(\vec{b}_1+\vec{b}_2)=\vec{a}\,\vec{b}_1+\vec{a}\,\vec{b}_2$.
4. $\vec{a}^{\,2}\geq 0$, освен това $\vec{a}^{\,2}=0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}=\vec{0}$.

Определение 1 също показва какъв е геометричният смисъл на скаларното произведение.

Теорема 1. *Два ненулеви вектора* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *са перпендикулярни точно когато скаларното им произведение* $\vec{a}\,\vec{b}$ *е равно на нула.*

Доказателство. Ако векторите са перпендикулярни, ъгълът между тях $\varphi=(\vec{a},\vec{b})$ е прав, т.е. $\cos\varphi=0$. Оттук следва, че $\vec{a}\,\vec{b}=0$.

Обратно, ако $\vec{a}\,\vec{b}=0$, то според *определение 1* $|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\varphi=0$. От $|\vec{a}|\neq 0$ и $|\vec{b}|\neq 0$ следва, че $\cos\varphi=0$ или $\varphi=90^\circ$. Така доказахме, че векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са перпендикулярни.

От *определение 1* и *теорема 1* заключаваме, че в случаите: а) $\vec{a}=\vec{o}$, $\vec{b}\neq\vec{o}$; б) $\vec{a}\neq\vec{o}$, $\vec{b}=\vec{o}$; в) $\vec{a}=\vec{b}=\vec{o}$ и г) $\vec{a}\neq\vec{o}$, $\vec{b}\neq\vec{o}$, $\vec{a}\perp\vec{b}$ - скаларното произведение $\vec{a}\,\vec{b}=0$. Обратното е също вярно: ако $\vec{a}\,\vec{b}=0$, то или поне един от двата вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е нулев /случаи а), б) и в)/, или двата вектора са ненулеви и перпендикулярни /случай г)/.

3.3. ФОРМУЛИ ЗА СКАЛАРНО ПРОИЗВЕДЕНИЕ И РАЗСТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВЕ ТОЧКИ ПРИ ДЕКАРТОВА КООРДИНАТНА СИСТЕМА В РАВНИНАТА

Нека $O\vec{e_1}\vec{e_2}$ е фиксирана декартова координатна система в равнината. Тогава базисните вектори $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ са единични и перпендикулярни, т.е. според предната точка (определение 1 и теорема 1) са изпълнени равенствата

(1) $\vec{e_1}^{\,2}=|\vec{e_1}|^2=1$, $\vec{e_2}^{\,2}=|\vec{e_2}|^2=1$, $\vec{e_1}\vec{e_2}=0$.

Оттук лесно се получават формули за скаларно произведение на два вектора, скаларен квадрат и дължина на вектор чрез координатите на векторите.

Теорема 2. *Нека* $\vec{a}(\alpha_1,\alpha_2)$ *и* $\vec{b}(\beta_1,\beta_2)$ *са два вектора в равнината, на които координатите са спрямо декартова координатна система* $O\vec{e_1}\vec{e_2}$ *. Тогава*

а) $\vec{a}\vec{b}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2$;

б) $\vec{a}^{\,2}=\vec{a}.\vec{a}=\alpha_1^2+\alpha_2^2$;

в) $|\vec{a}|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}$.

Доказателство. Съгласно определението за координати на вектор от *глава 2*, $\vec{a}=\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}$, $\vec{b}=\beta_1\vec{e_1}+\beta_2\vec{e_2}$. Тогава, като използваме равенствата (1), получаваме $\vec{a}\vec{b}=$

$$=(\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2})(\beta_1\vec{e_1}+\beta_2\vec{e_2})=\alpha_1\beta_1\vec{e_1}^{\,2}+\alpha_1\beta_2\vec{e_1}\vec{e_2}+\alpha_2\beta_1\vec{e_2}\vec{e_1}+$$

$$+\alpha_2\beta_2\vec{e_2}^{\,2}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2.$$

б) Ако в горното равенство заместим $\vec{b}$ с $\vec{a}$, получаваме $\vec{a}^{\,2}=\vec{a}.\vec{a}=\alpha_1\alpha_1+\alpha_2\alpha_2=\alpha_1^2+\alpha_2^2$.

в) От $\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$ следва, че $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}$.

За илюстрация на третата формула да пресметнем дължината на вектора $\vec{a}(3,-4)$: $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$.

Следствие 1. *Нека* φ *е елементарно-геометричния ъгъл между ненулевите вектори* $\vec{a}(\alpha_1,\alpha_2)$ *и* $\vec{b}(\beta_1,\beta_2)$*. Тогава*

(2) $$\cos\varphi=\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}.$$

Доказателство. Според *определение 1* - $\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\varphi$, откъдето $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$. Като приложим *теорема 2,* получаваме формулата (2).

Един вектор $\vec{n}(n_1,n_2)$ е единичен, ако дължината му е равна на 1, или равносилно, $\vec{n}^{\,2}=n_1^2+n_2^2=1$. Сега ще намерим друг израз на връзката между координатите на единичния вектор.

Теорема 3. *Ако* $\vec{n}(n_1,n_2)$ *е единичен вектор, а* α *е ъгълът между векторите* $\vec{n}$ *и* $\vec{e_1}$*, то* $n_1=\cos\alpha$ *и* $n_2=\sin\alpha$.

Доказателство. Според определението за координати на вектор $\vec{n}=n_1\vec{e_1}+n_2\vec{e_2}$.

Умножаваме скаларно двете страни на последното равенство с $\vec{e_1}$ и получаваме $\vec{n}\,\vec{e_1}=n_1\vec{e_1}^{\,2}+n_2\vec{e_2}\,\vec{e_1}$. Оттук и от (1) $\vec{n}\,\vec{e_1}=n_1$ или $n_1=|\vec{n}|.|\vec{e_1}|.\cos\alpha=1.1.\cos\alpha$. Ако $\beta=\angle(\vec{n},\vec{e_2})$, то $\beta=\pm(90°-\alpha)$. Отново умножаваме двете страни на равенството $\vec{n}=n_1\vec{e_1}+n_2\vec{e_2}$ скаларно с $\vec{e_2}$ и получаваме $n_2=\vec{n}\,\vec{e_2}=\cos\beta=\sin\alpha$.

Разстояние между две точки A и B се нарича дължината на отсечката AB, т.е. двете понятия са синоними. Разстоянието между точките A и B означаваме с $\rho(A,B)$, а дължината на отсечката AB с $|AB|$. Тогава за всеки две точки в равнината $\rho(A,B)=|AB|$. Основните свойства на разстоянието между две точки (дължината на отсечка) са следните:

1. $\rho(A,B)=\rho(B,A)$, т.е. $|AB|=|BA|$.

2. $\rho(A,B)+\rho(B,C)\ge\rho(A,C)$, т.е. $|AB|+|BC|\ge|AC|$.

3. $\rho(A,B)\ge 0$; $\rho(A,B)=0 \iff A=B$.

Второто свойство е вярно за всеки три точки A, B и C в равнината и се нарича неравенство на триъгълника.

Определянето на разстоянието между две точки е важна практическа задача. Сега ще видим как става това с помощта на координати.

Теорема 4. *Нека* $A(x_1, y_1)$ *и* $B(x_2, y_2)$ *са две точки, на които координатите са спрямо декартовата координатна система* $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ *в равнината. Тогава разстоянието между двете точки или дължината на отсечката* AB *се пресмята с формулата*

(3) $\rho(A, B) = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Доказателство. Използвайки *теорема 2* от *глава 2*, първо намираме координатите на вектора $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Тогава от $\rho(A, B) = |AB| = |\vec{AB}|$ и Теорема 2 в) веднага следва (3).

3.4. ПРИМЕРНИ ЗАДАЧИ

Функцията $y = \cos\varphi$ е добре дефинирана в затворения интервал $[0, \pi]$, приема стойности в затворения интервал $[-1, 1]$ и притежава обратна. Това означава, че на различни $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, \pi]$ отговарят различни стойности $y_1, y_2 \in [-1, 1]$ и за всяко $y_0 \in [-1, 1]$ съществува единствено $\varphi_0 \in [0, \pi]$, за което е изпълнено $y_0 = \cos\varphi_0$. Оттук следва, че ако $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ е елементарно-геометричният ъгъл между два ненулеви вектори, то $\cos\varphi \in [0, 1]$ (т.е. $\vec{a}\,\vec{b} \geq 0$) <=> $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (или равносилно $0° \leq \varphi \leq 90°$) и $\cos\varphi \in [-1, 0)$ (т.е. $\vec{a}\,\vec{b} < 0$) <=> $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ (или равносилно $90° < \varphi \leq 180°$).

Вече използвахме, че $\cos\varphi = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 0 \quad (= 0°)$ и $\cos\varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (= 90°)$. Да напомним някои други стойности на $\cos\varphi$: $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{6} \quad (= 30°)$;
$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \quad (= 45°)$; $\cos\varphi = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{3} \quad (= 60°)$;
$\cos\varphi = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{2\pi}{3} \quad (= 120°)$; $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{3\pi}{2} \quad (= 135°)$
; $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{5\pi}{6} \quad (= 150°)$; $\cos\varphi = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \pi \quad (= 180°)$.

Координатите на всички точки и вектори в следващите задачи са спрямо фиксирана декартова координатна система $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ в равнината.

Задача 1. Дадени са векторите $\vec{a}(2, -3)$, $\vec{b}(-5, 1)$, $\vec{c}(8, 6)$ и точка $A(4, 4)$.

а) Да се пресметнат скаларните произведения $\vec{a}\,\vec{b}$, $\vec{a}\,\vec{c}$ и косинусите на ъглите $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ и $\psi = \angle(\vec{a}, \vec{c})$.

б) Да се намерят координатите на точки P и Q такива, че векторите $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AQ}$ да са единични, $\overrightarrow{AP} \uparrow\uparrow \vec{c}$ и $\overrightarrow{AQ} \uparrow\downarrow \vec{c}$.

Решение. а) От *теорема 2 а)* следва $\vec{a}\,\vec{b} = 2.(-5) + (-3).1 = -13$ и $\vec{a}\,\vec{c} = 2.8 + (-3).6 = -2$. Съгласно *следствие 1*

$$\cos\varphi = \frac{2.(-5) + (-3).1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}.\sqrt{(-5)^2 + 1^2}} = \frac{-13}{\sqrt{13}.\sqrt{26}} = -\frac{13}{13\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

. Следователно $\varphi = 135^\circ$.

Аналогично $\cos\psi = \frac{2.8 + (-3).6}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}.\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{-2}{\sqrt{13}.10} = -\frac{1}{5\sqrt{13}}$, т.е. ψ е тъп ъгъл.

б) Дължината на вектора $\vec{c}$ намираме с помощта на

теорема 2 в), т.е. $|\vec{c}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. Тогава според *определение 5* от *глава* 1 векторът $\vec{n} = \frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c} = \frac{1}{10}.\vec{c}$ е еднопосочно колинеарен с $\vec{c}$, защото $\frac{1}{10} > 0$, а дължината му е $|\vec{n}| = \left|\frac{1}{10}\right|.|\vec{c}| = \frac{1}{10}.10 = 1$. Ако $P(x_1, y_1)$ е първата търсена точка, то векторите $\overrightarrow{AP}(x_1 - 4, y_1 - 4)$ и $\vec{n}\left(\frac{8}{10}, \frac{6}{10}\right)$ са равни, което означава, че и координатите им са също равни. Следователно $x_1 - 4 = \frac{8}{10}$, $y_1 - 4 = \frac{6}{10}$ или $x_1 = 4{,}8$ и $y_1 = 4{,}6$ са координатите на точка P. Векторът $-\vec{n}\left(-\frac{8}{10}, -\frac{6}{10}\right)$ е противопосочно колинеарен с $\vec{c}$, а дължината му е $|-\vec{n}| = \sqrt{\left(-\frac{8}{10}\right)^2 + \left(-\frac{6}{10}\right)^2} = 1$. Тогава точка $Q(x_2, y_2)$ се определя с векторното равенство $\overrightarrow{AQ} = -\vec{n}$. Оттук $x_2 - 4 = -\frac{8}{10}$, $y_2 - 4 = -\frac{6}{10}$ или координатите на точка Q са $x_2 = 3{,}2$ и $y_2 = 3{,}4$.

Задача 2. Дадени са точките $A(1, 6)$, $B(-3, 2)$, $C(-1 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3})$ и $D(3 - 2\sqrt{3}, 8 + 2\sqrt{3})$.

а) Да се докаже, че четириъгълникът $ABCD$ е ромб.

б) Да се намерят косинусите на ъглите

$\varphi = \angle BAD = \angle(\vec{AB}, \vec{AD})$ и $\psi = \angle ABC = \angle(\vec{BA}, \vec{BC})$.

Решение. а) Прилагайки *теорема 2* от *глава 2,* получаваме координатите на векторите $\vec{AB}(-4,-4)$, $\vec{DC}(-4,-4)$ и $\vec{BC}(2-2\sqrt{3}, 2+2\sqrt{3})$. От равенството $\vec{AB} = \vec{DC}$ следва, че $ABCD$ е успоредник. От *теорема 2 в)* следва $|\vec{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$ и $|\vec{BC}| = \sqrt{(2-2\sqrt{3})^2 + (2+2\sqrt{3})^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Тогава дължините на страните на успоредника $ABCD$ са равни или $ABCD$ е ромб.

б) Понеже $\vec{AB}(-4,-4)$ и $\vec{AD}(2-2\sqrt{3}, 2+2\sqrt{3})$, то съгласно Следствие 1

$$\cos\varphi = \frac{-4(2-2\sqrt{3}) - 4(2+2\sqrt{3})}{\sqrt{(-4)^2 + (-4)^2}.\sqrt{(2-2\sqrt{3})^2 + (2+2\sqrt{3})^2}} = \frac{-16}{\sqrt{32}.\sqrt{32}} = -\frac{1}{2}$$

или $\varphi = 120°$. Аналогично от $\vec{BA}(4,4)$ и $\vec{BC}(2-2\sqrt{3}, 2+2\sqrt{3})$ следва, че

$$\cos\psi = \frac{4(2-2\sqrt{3}) + 4(2+2\sqrt{3})}{\sqrt{4^2 + 4^2}.\sqrt{(2-2\sqrt{3})^2 + (2+2\sqrt{3})^2}} = \frac{16}{\sqrt{32}.\sqrt{32}} = \frac{1}{2}$$

или $\psi = 60°$.

Задача 3. Точките $A(2,-1)$, $B(5,3)$ и $C(-2,2)$ са върхове на ΔABC. Да се пресметнат:

а) скаларните произведения $\vec{AB}.\vec{AC}$ и $\vec{BA}.\vec{BC}$;

б) дължините на страните на триъгълника и косинусите на ъглите $\angle BAC$ и $\angle ABC$;

в) дължините на медианите на триъгълника;

г) координатите на медицентъра G на триъгълника (пресечната точка на медианите).

Решение. а) Отново използваме *теорема 2* от *глава 2* за пресмятане на координатите на векторите $\vec{AB}(3,4)$, $\vec{AC}(-4,3)$, $\vec{BA}(-3,-4)$ и $\vec{BC}(-7,-1)$. Тогава от *теорема 2 а)* следва $\vec{AB}.\vec{AC} = 3.(-4) + 4.3 = 0$ и $\vec{BA}.\vec{BC} = (-3).(-7) + (-4).(-1) = 25$. Съгласно *теорема 1* векторите $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ са перпендикулярни, а векторите $\vec{BA}$ и $\vec{BC}$ не са перпендикулярни.

б) Използваме *теорема 2 в)* за да получим дължините на

страните: $|AB| = |\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, $|BC| = |\vec{BC}| =$

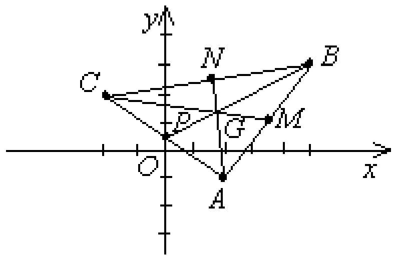
$= \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ и $|AC| = |\vec{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$. От *следствие 1* (или от определението за скаларно произведение на два ненулеви вектора), ако

$\varphi = \angle BAC = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, то $\cos\varphi = \dfrac{0}{\sqrt{25}.\sqrt{25}} = 0$ или $\varphi = 90^\circ$. Аналогично, ако $\psi = \angle ABC = \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$, то $\cos\psi = \dfrac{25}{\sqrt{25}.\sqrt{50}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ или $\psi = 45^\circ$. Оттук заключаваме, че ΔABC е равнобедрен и правоъгълен.

в) Нека M е среда на AB, N - на BC и P - на CA (фиг. 2.). Координатите на трите среди определяме с *теорема 3* от *глава 2* - $M(3{,}5;1)$, $N(1{,}5;2{,}5)$ и $P(0;0{,}5)$. Оттук и от *теорема 4* следва $|CM| = \rho(C,M) = \sqrt{(3{,}5-(-2))^2 + (1-2)^2} = = \sqrt{(5{,}5)^2 + 1} = \sqrt{29{,}25}$.

Аналогично $|BP| = \rho(B,P) = \sqrt{(0-5)^2 + (0{,}5-3)^2} =$

$= \sqrt{25 + 6{,}25} = \sqrt{31{,}25}$ и $|AN| = \rho(A,N) = \sqrt{(-0{,}5)^2 + (3{,}5)^2} = \sqrt{12{,}5}$.



Фиг. 2.

г) Нека (x,y) са координатите на точка G. Според *упражнение 5* на *глава 1* за радиус-векторите $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ е изпълнено равенството $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.
В последното равенство приравняваме първите координати, т.е. $x = \dfrac{1}{3}(2+5-2) = \dfrac{5}{3}$, а също и вторите координати $y = \dfrac{1}{3}(-1+3+2) = \dfrac{4}{3}$. Окончателно получаваме $G\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$.

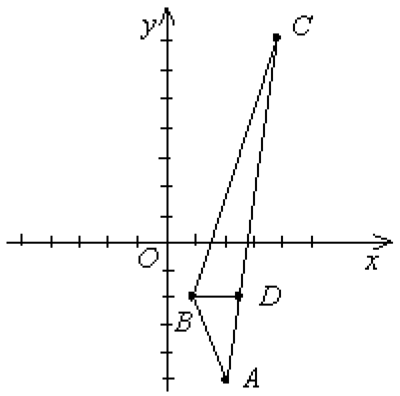
Задача 4. Върховете на ΔABC имат координати $A(2,-5)$, $B(1,-2)$ и $C(4,7)$. Ъглополовящата при върха B пресича страната AC в точка D. Да се пресметнат:

а) координатите на точка D;

б) дължината на ъглополовящата BD.

Решение. а) От свойството на ъглополовящата $|AD|:|CD| = |AB|:|BC| = \rho(A,B):\rho(B,C) =$
$= \sqrt{(1-2)^2 + (-2+5)^2} : \sqrt{(4-1)^2 + (7+2)^2} = \sqrt{10} : \sqrt{90} = \dfrac{1}{3}$. Оттук $\overrightarrow{AD} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ (вж. фиг. 3.). Ако (x,y) са координатите на точка D, то $\overrightarrow{AD}(x-2, y+5)$, $\overrightarrow{CD}(x-4, y-7)$ и горното

векторно равенство е еквивалентно с две координатни равенства: $x-2=-\frac{1}{3}(x-4)$ и $y+5=-\frac{1}{3}(y-7)$. От първото равенство $3x-6=-x+4$ или $x=2{,}5$, а от второто $3y+15=-y+7$ или $y=-2$, т.е. $D(2{,}5;-2)$.



Фиг. 3.

б) $|BD|=\rho(B,D)=\sqrt{(2{,}5-1)^2+(-2+2)^2}=1{,}5$.

Задача 5. Точките $A(2,-1)$, $B(-1,0)$ и $C(2,3)$ са върхове на ΔABC. Да се намерят:

а) координатите на ортоцентъра H на триъгълника (пресечната точка на височините);

б) координатите на центъра P на описаната около триъгълника окръжност (пресечната точка на симетралите на страните);

в) разстоянието между точките H и P.

Решение. а) Нека (x,y) са координатите на точка H. Тогава $\overrightarrow{AH}(x-2,y+1)$ и $\overrightarrow{BC}(3,3)$ са перпендикулярни, съгласно *теорема 1* $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$ и като приложим *теорема 2 а)* $(x-2).3+(y+1).3=0$, т.е. $x+y-1=0$. Аналогично от $\overrightarrow{BH}(x+1,y)\perp\overrightarrow{AC}(0,4)$ следва $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0$, т.е. $(x+1).0+y.4=0$ или $y=0$. Окончателно координатите (x,y) на точка H удовлетворяват системата от две уравнения с две неизвестни: $\left|\begin{array}{l}x+y-1=0\\ y=0\end{array}\right.$ или $H(1,0)$.

б) Тъй като P е на равни разстояния от върховете на триъгълника, то $\rho(A,P)=\rho(B,P)$ и $\rho(B,P)=\rho(C,P)$. Нека (u,v) са координатите на P. Тогава

$\rho(A,P)=\rho(B,P)$ <=> $\sqrt{(u-2)^2+(v+1)^2}=\sqrt{(u+1)^2+v^2}$ <=>

$(u-2)^2+(v+1)^2=(u+1)^2+v^2$ <=>

$u^2-4u+4+v^2+2v+1=u^2+2u+1+v^2$ <=> $3u-v-2=0$. Аналогично

$\rho(B,P)=\rho(C,P)$ <=> $\sqrt{(u+1)^2+v^2}=\sqrt{(u-2)^2+(v-3)^2}$ <=>
$u^2+2u+1+v^2=u^2-4u+4+v^2-6v+9$ <=> $u+v-2=0$. Следователно координатите u и v на P са решение на системата $\left|\begin{array}{l}3u-v-2=0\\ u+v-2=0\end{array}\right.$. Изразяваме $v=2-u$ от второто уравнение и заместваме в първото $3u-2+u-2=0$. Оттук $u=1$ и $v=1$ са координатите на P, т.е. $P(1,1)$.

в) $\rho(H,P)=\sqrt{(1-1)^2+(1-0)^2}=1$.

ЗА САМОПОДГОТОВКА

Упражнения

1. В равнината са дадени точките $A(1,1)$, $B(-1,0)$, $C(-3,4)$ и $D(-1,5)$.

а) Да се докаже, че четириъгълникът $ABCD$ е правоъгълник.

б) Да се пресметне косинусът на ъгъла между диагоналите $\varphi=\angle(\vec{AC},\vec{BD})$.

в) Да се пресметне лицето на правоъгълника.

2. Да се докаже, че точките $A(2,2)$, $B(-1,6)$, $C(-5,3)$ и $D(-2,-1)$ са върхове на квадрат. Да се пресметне лицето на този квадрат.

3. Върховете на ΔABC са $A(3,-5)$, $B(-3,3)$ и $C(-1,-2)$. Ако M е средата на отсечката AB, а D е пресечната точка на ъглополовящата при върха A със страната BC, да се пресметнат:

а) дължината на медианата CM на триъгълника;

б) координатите на точка D и дължината на ъглополовящата AD;

в) периметърът на триъгълника.

4. Даден е ΔABC с върхове $A(-3,6)$, $B(9,-10)$ и $C(-5,4)$. Да се пресметнат:

а) координатите на ортоцентъра H на триъгълника;

б) координатите на центъра P и дължината на радиуса r на описаната около триъгълника окръжност;

в) разстоянието между точките H и P.

5. Дадени са точките $A(1,1)$, $B(9,-5)$ и $C(6,13)$.

а) да се намерят координатите на точка P такава, че $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{13}\overrightarrow{AC}$.

б) ако $\varphi=\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP})$, а $\psi=\angle(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP})$, да се докаже, че $\cos\varphi=\cos\psi$ (т.е. правата AP е ъглополовяща на $\angle BAC$).