Формули по ЛААГ - Алгебра

Аритметични операции

$ab+ac=a(b+c)$ $a\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$

$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}=\frac{a}{bc}$ $\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}=\frac{ac}{b}$

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$

$\frac{a-b}{c-d}=\frac{b-a}{d-c}$ $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$

$\frac{ab+ac}{a}=b+c, a\neq 0$ $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}=\frac{ad}{bc}$

Свойства на степента

$a^na^m=a^{n+m}$ $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}=\frac{1}{a^{m-n}}$

$(a^n)^m=a^{nm}$ $a^0=1, a\neq 0$

$(ab)^n=a^nb^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ $\frac{1}{a^{-n}}=a^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$ $a^{\frac{n}{m}}=(a^{\frac{1}{m}})^n=(a^n)^{\frac{1}{m}}$

Свойства на коренуването

$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nm]{a}$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\sqrt[n]{a^n}=a$, n – нечетно

$\sqrt[n]{a^n}=|a|$, n – четно

Свойства на абс. стойност

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geq 0\\ -a, & a<0\end{cases}$$

$|a|\geq 0$ $|-a|=|a|$

$|ab|=|a||b|$ $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

$|a+b|\leq |a|+|b|$ – **н-во на $\triangle$**

Тригонометрични функции

$\angle^\circ$ / $\angle^{\text{рад.}}$	0° / 0	30° / $\frac{\pi}{6}$	45° / $\frac{\pi}{4}$	60° / $\frac{\pi}{3}$	90° / $\frac{\pi}{2}$	120° / $\frac{2\pi}{3}$	135° / $\frac{3\pi}{4}$	150° / $\frac{\pi}{56}$	180° / π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cotg	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Комплексни числа

$i=\sqrt{-1}$ $i^2=-1$ $\sqrt{-a}=i\sqrt{a}, a\geq 0$

$(a+ib)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

$(a+ib)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

$(a+ib)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}i$

$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}\geq 0$ – модул в $\mathbb{C}$

$\overline{a+bi}=a-bi$ – комп. спрегнато

$(a+bi)(\overline{a+bi})=|a+bi|^2=a^2+b^2$

Тригон. вид в $\mathbb{C}$

$\alpha=a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

$|\alpha|=r=\sqrt{a^2+b^2}=|\overrightarrow{O\alpha}|, \varphi=\angle(\overrightarrow{O\alpha},\overrightarrow{Ox})$

$\frac{a}{r}=\cos\varphi, \frac{b}{r}=\sin\varphi$

за $\alpha{=}r(\cos\varphi{+}i\sin\varphi), \beta{=}r_1(\cos\varphi_1{+}i\sin\varphi_1)$:

$\alpha\beta=rr_1\left[\cos(\varphi+\varphi_1)+i\sin(\varphi+\varphi_1)\right]$

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{r}{r_1}\left[\cos(\varphi-\varphi_1)+i\sin(\varphi-\varphi_1)\right], \beta\neq 0$

$\alpha^n=r^n\left[\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)\right], n=1,2,3,\ldots$

$\sqrt[n]{\alpha}{=}\sqrt[n]{r}\left[\cos(\frac{\varphi+2k\pi}{n}){+}i\sin(\frac{\varphi+2k\pi}{n})\right], k{=}0{\div}n{-}1$

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0, a\neq 0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

при $D=\sqrt{b^2-4ac}>0\Rightarrow 2$ $\mathbb{R}$ корена

при $D=\sqrt{b^2-4ac}=0\Rightarrow 1$ $\mathbb{R}$ корен

при $D=\sqrt{b^2-4ac}<0\Rightarrow 2$ $\mathbb{C}$ корена

Формули за разлагане

$ax+b=c\Rightarrow x=\frac{c-b}{a}, a\neq 0$

$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$

$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

$x^2+(a+b)x+ab=(a+b)(x+b)$

$(x+a)^3=x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$

$(x-a)^3=x^3-3x^2a+3xa^2-a^3$

$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$

$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$

$x^{2n}-a^{2n}=(x^n-a^n)(x^n+a^n)$

за нечетно n:

$x^n{-}a^n=(x{-}a)(x^{n-1}{+}ax^{n-2}{+}\ldots{+}a^{n-1})$

$x^n{+}a^n=(x{+}a)(x^{n-1}{-}ax^{n-2}{+}a^2x^{n-3}{+}\ldots{+}a^{n-1})$

Ако $x^2=p>0$, то $x=\pm\sqrt{p}$

Детерминанти

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \quad \det A=\det A^T$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}{+}a_{12}a_{23}a_{31}{+}a_{13}a_{21}a_{32}{-}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}{-}a_{12}a_{21}a_{33}{-}a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum(-1)^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n]}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2,n-1} & a_{2n}\\ 0 & 0 & \ldots & a_{3,n-1} & a_{3n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$$

Поддетерминанти и адюнгирани к-ва

Δ_{ij} – получена от Δ след премахването на $i-$ти ред и $j-$ти стълб - **поддет.**

$A_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ – **адюнгирано количество**

Развитие на дет. по ред/стълб

$A=(a_{ij})$ – кв. матр. от ред n, детерминантата ѝ:

$\det A{=}a_{i1}A_{i1}{+}\ldots{+}a_{in}A_{in}, 1{\leq}i{\leq}n$ – **по $i-$ти ред**

$\det A{=}a_{1j}A_{1j}{+}\ldots{+}a_{nj}A_{nj}, 1{\leq}j{\leq}n$ – **по $j-$ти ст.**

Действия с матрици

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ b_{m1} & \dots & b_{mn}\end{pmatrix}:$$

сума: $A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$

пр. с число: $\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}$

$A+B=B+A$, $(A+B)+C=A+(B+C)$

O – тип $m\times n$, с елементи нули:

$A+O=A$, $A+(-A)=O$, $1.A=A$

$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$, $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

$(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$

Умножение на матрици

матрица A от тип $m\times n$, B – $n\times s$

произведение: матрица AB от тип $m\times s$

$AB=\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1s}\\ \dots & \dots & \dots\\ c_{m1} & \dots & c_{ms}\end{pmatrix}$ $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\dots+a_{in}b_{nj}$,

$i=1\div m$, $j=1\div s$, правило - **„ред по стълб“:**

$\forall$ ред на A се умножава с $\forall$ стълб на B

$(AB)C=A(BC)$, $A(B+C)=AB+AC$

$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$, $\det(AB)=\det A.\det B$

$(AB)^T=B^TA^T$

Обратна матрица, матрични уравнения

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1}\\ \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}=\frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A)$$

A^{-1} – обратна матрица, $A.A^{-1}=A^{-1}.A=E$

$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B$

$XA=B\Rightarrow X=BA^{-1}$

$AXB=C\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$

Формули на Крамер

За с-ма n линейни уравнения с n неизвестни

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n= \quad b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n= \quad b_2\\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\dots \quad \dots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n= \quad b_n\ ,\end{array}\right., \Delta=|a_{ij}|\neq 0$$

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,k-1} & b_1 & a_{1\,k+1} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \dots & a_{2\,k-1} & b_2 & a_{2\,k+1} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{n\,k-1} & b_n & a_{n\,k+1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

k-ти стълб на Δ заменяме с $b_1,\dots,b_n$

Системата има решение $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta},\frac{\Delta_2}{\Delta},\dots,\frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$.

Вектори

$a_1,\dots,a_s$ – в-ри, $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ – скалари, векторът $a=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\dots+\lambda_sa_s$ е **лин. комб.**

$a_1,\dots,a_s$ – **линейно зависими** ако $\exists\lambda_1,\dots,\lambda_s$, поне едно $\lambda\neq 0$: $\lambda_1a_1+\dots+\lambda_sa_s=0$.

$a_1,\dots,a_s$ – **лин. незав.**, ако $\lambda_1a_1+\ldots+\lambda_sa_s=0$. е изпълнено само при $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_s=0$,

$a_1,\dots,a_s$ – с-ма в-ри, max брой лин. незав. в-ри в тази с-ма е **ранг** на системата $\operatorname{rank}(a_1,\dots,a_s)$

в-рът $g\neq 0$ е **собств. вектор** на лин. опер. φ, ако $\varphi(g)=\lambda_0 g.$, λ_0 е **собствена стойност** на φ

Алгоритъм за собст. в-ри и собст. ст-ти

1. $f(\lambda)=\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \dots & \alpha_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda\end{vmatrix}$

2. Решаваме $f(\lambda)=0$ и намираме соб. ст. на φ.

3. $\forall\lambda_0$ - с.с намираме соб. в-р g – решение на

$(\alpha_{11}-\lambda_0)x_1+\alpha_{12}x_2+\dots+\alpha_{1n}x_n=0$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\dots+(\alpha_{nn}-\lambda_0)x_n=0$

Метод на Грам-Шмид

$a_1,\dots,a_n$ – базис, търсим ортог. базис $e_1,\dots,e_n$

$e_1=a_1$

$e_2=a_2+\lambda e_1; \lambda=-\frac{(a_2,e_1)}{(e_1,e_1)}$

$e_3=a_3+\lambda_1e_1+\lambda_2e_2; \lambda_1=-\frac{(a_3,e_1)}{(e_1,e_1)}, \lambda_2=-\frac{(a_3,e_2)}{(e_2,e_2)}\dots$

Допускаме, че сме построили e_{n-1}

$e_n=a_n+\mu_1e_1+\ldots+\mu_{n-1}e_{n-1}$, където

$\mu_1=-\frac{(a_n,e_1)}{(e_1,e_1)},\dots,\mu_{n-1}=-\frac{(a_n,e_{n-1})}{(e_{n-1},e_{n-1})}$

ортонорм. базис е $e_1^*=\frac{1}{|e_1|}e_1,\dots,e_n^*=\frac{1}{|e_n|}e_n$

Алгоритъм диагонализиране (главни оси)

1. Записваме матрицата A на кв. форма

2. Намираме соб.ст. $\lambda_1,\dots,\lambda_n$

3. Канон. вид е $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\dots+\lambda_ny_n^2$

4. Намираме соб. в-ри $g_1,\dots,g_n$

5. Ако $g_1,\dots,g_n$ не са $\perp\Rightarrow$ Грам-Шмид

6. Нормир. $g_1,\dots,g_n$ до $e_1^*=\frac{1}{|g_1|}g_1,\dots,e_1^*=\frac{1}{|g_1|}g_1$

7. $C=T^TAT$, където $C=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}$

T – ортогонална матр. със стълбове $e_1^*,\dots,e_n^*$.

8. Ортогоналното преобразуване е $X=TY$